

1 Übung: Grundlagen der Finanzmathematik

Literaturhinweise:

- Götz, Uwe/ Bloech, Jürgen: Investitionsrechnung – Modelle und Analysen zur Beurteilung von Investitionsvorhaben, 1. Aufl., Heidelberg 1993 (oder aktuellere Auflagen)
- Grundmann, Wolfgang/ Luderer, Bernd: Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse, 2. Aufl., Stuttgart 2003
- Renger, Klaus: Finanzmathematik mit Excel, 2. Aufl., Wiesbaden 2006

1.1 Investitionsrechnung

- **Ziel:** Bestimmung der absoluten und relativen Vorteilhaftigkeit eines Investitionsobjektes
- **Methode:**
 - (1) Kapitalwert
 - (2) interner Zinssatz
- **Relevanz für IFRS:** Leasing, Impairment-Test, Finanzinstrumente

1.1.1 Kapitalwertmethode

- **Definition:**

Der Kapitalwert ist die Summe aller auf einen Zeitpunkt ab- bzw. aufgezinsten Ein- und Auszahlungen, die durch die Realisation eines Investitionsobjektes verursacht werden. (Vgl. Götz/Bloech, Investitionsrechnung, S. 73 m.w.N.)

- **Modellannahme:**

vollkommener Kapitalmarkt, d.h. finanzielle Mittel können in unbeschränkter Höhe zum einheitlichen Kalkulationszins angelegt und aufgenommen werden; Einzahlungen und Auszahlungen sind prognostizierte Werte

- **Symbole und Bezeichnungen:**

K_0 Kapitalwert, Gegenwartswert

E_t Einzahlungen im Zeitpunkt t

A_t Auszahlungen im Zeitpunkt t

q^{-t} Abzinsungsfaktor für den Zeitpunkt t , wobei $q = 1 + p/100$ mit Zinssatz p [in %]

g Wachstumsrate [in %]

- **Standardformel:**
$$K_0 = \sum_{t=0}^T \frac{E_t - A_t}{q^t}$$

- **Ewige Rente:**
$$K_0 = \frac{E_t - A_t}{p/100}$$

- **Ewige Rente mit Wachstum:**
$$K_0 = \frac{E_t - A_t}{p/100 - g/100}$$

• Übungsaufgabe 1:

Für eine Investition sind vorschüssig (zu Jahresbeginn) folgende Einzahlungen und Auszahlungen geplant:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Einzahlungen (Euro)	0	3.000	5.000	4.000	?	2.000
Auszahlungen (Euro)	8.000	2.000	1.000	2.000	1.000	500

Wie hoch müssten die Einzahlungen im vierten Jahr mindestens sein, damit die Investition sich bei einem zugrunde liegenden Kalkulationszinssatz von 8% lohnt?

Quelle: TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik, Prof. Bernd Luderer, Übungsaufgaben Mathematik I und II für Wirtschaftswissenschaftler des SS 2008 und WS 2008/09.

1.1.2 Methode des internen Zinssatzes

• Definition:

Beim internen Zinssatz handelt es sich um den Zinssatz, der – als Kalkulationszinssatz verwendet – zu einem Kapitalwert von Null führt.

(Vgl. Götze/Bloech, Investitionsrechnung, S. 90 m.w.N.)

• Modellannahme:

vollkommener Kapitalmarkt, d.h. finanzielle Mittel können in unbeschränkter Höhe zum einheitlichen Kalkulationszins angelegt und aufgenommen werden; Einzahlungen und Auszahlungen sind prognostizierte Werte

• Lösungsmöglichkeiten:

$$K_0 = \sum_{t=0}^T \frac{E_t - A_t}{q^t} = 0$$

Inter-/ Extrapolieren, Newton-Verfahren, Nullstellenberechnung bei quadratischen Gleichungen (sog. Polynomgleichungen 2. Grades) mittels p-q Formel

• Übungsaufgabe 2:

Ein Investitionsprojekt ist durch folgende vorschüssige Zahlungsreihe gekennzeichnet:

t	0	1	2
ZÜ _t (Euro)	-8.000	+3.000	+5.500

Erfüllt dieses Investitionsprojekt die Mindestrenditeanforderung von 5%?

1.2 Zins und Tilgung

• Methode:

- (1) endfällige Tilgung
- (2) Ratentilgung
- (3) Annuitätentilgung

• Relevanz für IFRS: Leasing, Finanzinstrumente

1.2.1 Endfällige Tilgung

• Definition:

Der aufgenommene Kapitalbetrag ist erst am Ende der Laufzeit zu tilgen. Die laufenden Zinszahlungen bleiben konstant.

- **Symbole und Bezeichnungen:**

S_0 Darlehen, Anfangsschuld
 p Zinssatz [in %]
 Z_t Zinsbetrag in der t-ten Periode
 T_t Tilgungsbetrag in der t-ten Periode

- **Formel:** $Z_t = S_0 \times \frac{p}{100}$

1.2.2 Ratentilgung

- **Definition:**

Der aufgenommene Kapitalbetrag wird in gleichbleibenden Raten über die Darlehenslaufzeit getilgt. Die laufenden Zinszahlungen sinken kontinuierlich.

- **Symbole und Bezeichnungen:**

S_0 Darlehen, Anfangsschuld
 p Zinssatz [in %]
 t^- Gesamtlaufzeit
 Z_t Zinsbetrag in der t-ten Periode
 T_t Tilgungsbetrag in der t-ten Periode

- **Formel:** $Z_t = (S_0 - t^- \times \frac{S_0}{t^-}) \times \frac{p}{100}$

- **Übungsaufgabe 3:**

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit in Höhe von 1.000.000 Euro auf. Die Bank verlangt einen Zins von 12% p.a.. Berechnen Sie die Höhe der Ausgaben des Unternehmens, wenn der Kredit mit 10 gleichen Jahreszahlungen getilgt werden soll. Schreiben Sie den Zins- und Tilgungsplan der ersten 5 Jahre auf.

Quelle: TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik, Prof. Bernd Luderer, Übungsaufgaben Mathematik I und II für Wirtschaftswissenschaftler des SS 2008 und WS 2008/09.

1.2.3. Annuitätentilgung

- **Definition:**

Die Summe aus Zinsen und Tilgung (der sog. Kapitaldienst) des aufgenommenen Kapitalbetrags ist über die Darlehenslaufzeit konstant. Dabei sinkt der Zinsanteil kontinuierlich, der Tilgungsanteil steigt entsprechend.

- **Symbole und Bezeichnungen:**

S_0 Darlehen, Anfangsschuld
 q Aufzinsungsfaktor: $q=1+p$
 A Annuität
 A_t Annuitätenbetrag in der t-ten Periode

- **Formel:** $A = S_0 \times \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$

- **Übungsaufgabe 4:**

Ein Darlehen von 400.000 Euro soll innerhalb von 4 Jahren durch jährliche Raten mittels Annuitätentilgung zurückgezahlt werden (Zinssatz 7,5% p.a.).

a) Wie hoch ist die zu zahlende Annuität?

b) Stellen Sie den Zins- und Tilgungsplan auf.

Quelle: TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik, Prof. Bernd Luderer, Übungsaufgaben Mathematik I und II für Wirtschaftswissenschaftler des SS 2008 und WS 2008/09.